Chapitre I

Calcul vectoriel et système de coordonnées

I-1 Notion fondamentales de calcul vectoriel

I-1- a) Définition

un vecteur $\overrightarrow{MN}=\vec{V}$ est un segment de droite, ayant une origine Met une extrémité N. il est défini par son origine ou point d'application M, sa direction qui est celle de la droite indéfinie Δ Son sens et son module (unicité du longueur) qui est sa longueur MN.

Rq : si $MN = 1$ le vecteur est dit unitaire (unicité du longueur).

Il existe trois types de vecteurs:

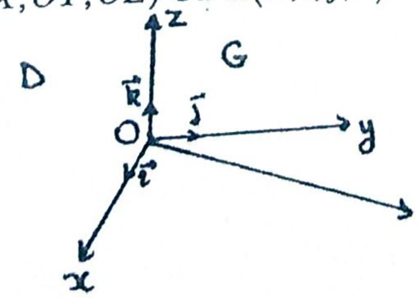
α) Vecteurs libres: un vecteur libre est un vecteur dont on ne précise ni l'origine ni le support. On le note $\vec{V}$

β) Vecteurs glissants ou glisseurs: Un glisseur est un vecteur dont on a précisé la droite Δ (ou support $\vec{V}$). c'est l'ensemble d'un vecteur et d'un support Δ . On le note $(\Delta,\vec{V})$
ex: Tension d'un fil.

γ) Vecteurs liés: un vecteur lié est un vecteur dont on a précisé l'origine M. c'est donc l'ensemble d'un point et d'un vecteur $\vec{V}$, on le note $(M,\vec{V})$

I-1- b) trièdre de référence

On emploie souvent le trièdre de référence par une base orthonormée (OX,OY,OZ) ou $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ou $O(xyz)$.

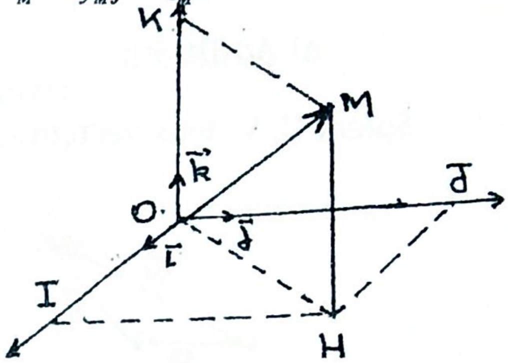


Un trièdre direct est un trièdre tel que un observateur placé sur Oz les pieds en O regardant dans la direction Ox et Oy et tel que Ox à sa droite et Oy à sa gauche.

(Ox, Oy, Oz) est normé si et seulement Ox sur $\vec{i}$, et Oy sur $\vec{j}$ et Oz sur $\vec{k}$.

I-1- c) Repérage d'un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$$



$\vec{r} = \overrightarrow{0M}$ = vecteur position

$$\overrightarrow{OI} = \|OI\|\vec{i} = x_M\vec{i}$$
$$\overrightarrow{OJ} = \|OJ\|\vec{j} = y_M\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OK} = \|OK\|\vec{k} = z_M\vec{k}$$

$$0M^2 = 0H^2 + HM^2 = 0I^2 + 0J^2 + 0K^2$$
$$= x^2{}_M + y^2{}_M + z^2{}_M$$

$$r = \sqrt{x^2{}_M + y^2{}_M + z^2{}_M}$$

Analytiquement un vecteur $\overrightarrow{MN} = \vec{V}$ est défini, par rapport à trois axes de coordonnées Ox , Oy, Oz (cas des coordonnées cartésiennes), par les projections V_x ; V_y ; V_z sur ces trois axes. On désigne par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ 3 vecteurs qui forment une base orthonormée et qui sont dirigés suivant Ox, Oy et Oz dans le sens positif de ces axes.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont 3 vecteurs unitaires dans un repère orthonormé.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases} \qquad i \in (1,2,3)$$

Soient (x_M, y_M, z_M) les composantes du point M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\overrightarrow{0M} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$

Soient (x_N, y_N, z_N) les composantes du point N dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{ON}=x_N\vec{i}+y_N\vec{j}+z_N\vec{k}$$

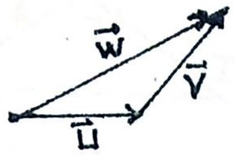
$$\vec{V}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(x_N-x_M)\vec{i}+(y_N-y_M)\vec{j}+(z_N-z_M)\vec{k}$$
$$=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$$

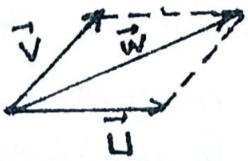
$\vec{V}=\vec{0}$ si et seulement si $V_x=V_y=V_z=0$

I-2 Opération sur les vecteurs libres:

a) Addition:

Soient U, V deux vecteurs non nuls,





Leur somme:

-Géométrique: $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$

- Analytique: $\vec{U}=U_1\vec{i}+U_2\vec{j}+U_3\vec{k}$
  $\vec{V}=V_1\vec{i}+V_2\vec{j}+V_3\vec{k}$

$$(\vec{U}+\vec{V})=(U_1+V_1)\vec{i}+(U_2+V_2)\vec{j}+(U_3+V_3)\vec{k}$$

somme de deux vecteurs commutative et associative

Etant donné 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ parallèles non nuls, on appelle rapport du vecteur $\vec{V}$ sur le vecteur $\vec{U}$, le nombre K tet que

$K=\frac{|V|}{|U|}, K>0$ *ou* <0 suivant que les vecteurs sont de même sens ou de sens contraire.

b) Multiplication par un scalaire

$$\lambda\vec{U}=\lambda u_1\vec{i}+\lambda u_2\vec{j}+\lambda u_3\vec{k}$$

c) Produit scalaire:

Définition:

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs libres et φ l'angle qu'ils forment, On appelle produit scalaire le nombre relatif produit des 3 nombres U, V et $\cos\varphi$

$$\vec{U}.\vec{V} = \|U\|\,\|V\|\,\cos\varphi$$

ce produit scalaire jouit des propriétés suivantes:

- $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$ commutatif
- $U.V = \|U\|\,\|V\|\,\cos\varphi = O$ il suffit que l'une des trois conditions suivantes soit réalisée:

- $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

$$U.U = \|U\|^2$$
$$U.V = U\,V\,\cos\varphi$$

Dans cette expression, on peut considérer que $V.\cos\varphi$ est la projection du vecteur $\vec{V}$ sur le support de $\vec{U}$. Le produit scalaire a l'interprétation suivante:

le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ est égal au produit de la norme de l'un des deux vecteurs par la projection de l'autre sur son support.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont 3 vecteurs unitaires dans un repère orthonormé

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$$

dans ce système d'axes

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad \vec{V'} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad V' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\vec{V}.\vec{V'} = \vec{V'}.\vec{V} = xx' + yy' + zz'$$

On en déduit le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs.

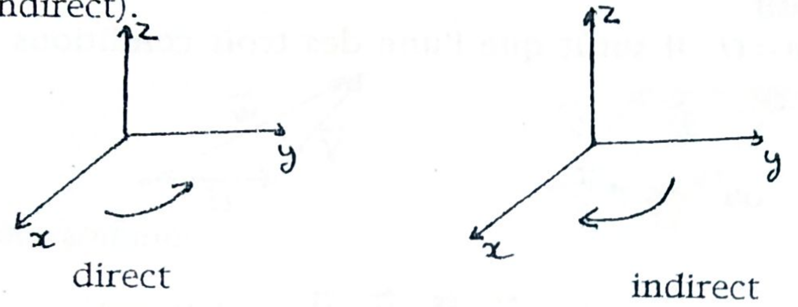
$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}.\vec{V'}}{|V|.|V'|} = \frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Exemple: travail d'une force

$$W = \vec{F}.\vec{L} = F.L\cos\varphi$$

d) produit vectoriel:

Avant de définir le produit vectoriel, il est important de préciser le choix des axes dans un repère cartésien . Il existe deux probabilités de numéroter, les axes donnant naissance à un repère direct (ou indirect).



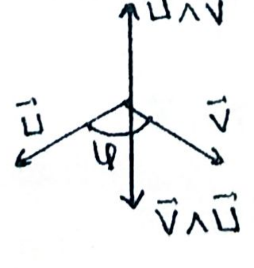
*** Définition:**

Soient $\vec{U}$et $\vec{V}$deux vecteurs libres et φ l'angle qu'ils forment, On appelle produit vectoriel (noté $\wedge$) le vecteur $\vec{W}$ ayant les propriétés suivantes:

- sa norme est égale à $|\vec{U}\wedge\vec{V}| = |U|.|V|\sin\varphi$
- le repère $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$ direct,

*** Propriété**

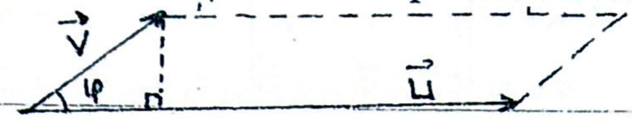
$\vec{U}\wedge\vec{V} = -\vec{V}\wedge\vec{U}$ n'est pas commutatif.



*$\vec{U}\wedge\vec{V} = \vec{0}$ si $\vec{U}$ parallèle à $\vec{V}$ ou si $\vec{U} = \vec{0}$ *ou* $\vec{V} = \vec{0}$

* On peut donner une signification géométrique simple au produit vectoriel, si on considère le parallélogramme construit sur les 2

vecteurs, la quantité $V.\sin\varphi$ représente la hauteur du parallélogramme et $UV.\sin\varphi$ en est simplement le surface.



* Si $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sont 3 vecteurs unitaires dans un repère orthonormé, en appliquant la définition du produit vectoriel on a

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}, \quad \vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$$

par permutation circulaire $\vec{i}\to\vec{j}\to\vec{k}\to\vec{i}$
$$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i};\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

dans ce système d'axes, on définit 2 vecteurs $\vec{V}$ *et* $\vec{V'}$

$$\vec{V}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, \qquad \vec{V'}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k}$$

$$\vec{V}\wedge\vec{V'}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(xx'\vec{i}\wedge\vec{i}+xy'\vec{i}\wedge\vec{j}+xz'\vec{i}\wedge\vec{k})+(yx'\,\vec{j}\wedge\vec{i}+yy'\,\vec{j}\wedge\vec{j}+yz\vec{j}\wedge\vec{k})+(zx'\,\vec{k}\wedge\vec{i}+zy\vec{k}\wedge\vec{j}+zz'\vec{k}\wedge\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

<u>Règle de calcul des composantes</u>

on peut procéder de différentes manières. La plus simple consiste à déterminer la composante en x en plaçant les coordonnées dans un tableau à 2 colonnes, une colonne pour le premier vecteur et une colonne pour le deuxième vecteur.

On barre la première ligne et on effectue le produit en croix en retranchant le deuxième produit. On obtient pour la composante en x, $yz'-zy'$.

Pour déterminer les autres composantes, il suffit de procéder par permutation circulaire x →y → z →x, x'→ y' → z'.

la deuxième composante devient zx' - xz'.

~~x~~	~~x'~~	x	x'	x	x
y	y'	~~y~~	~~y'~~	y	y'
z	z'	z	z'	~~z~~	~~z'~~
yz' - zy'		-(xz'-zx')		(xy'-yx')	

en peut aussi écrire

$$\vec{V}\wedge\vec{V'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}$$

e) Produit mixte:

Définition: Soient $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ 3 secteurs libres quelconque,
On appelle produit mixte de ces 3 vecteurs dans l'ordre comme ils sont écrits, le produit scalaire du premier par le produit vectoriel des deux derniers, c'est donc le nombre P défini par:
$P=\vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W})$

On le note également $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$
$(\vec{U},\vec{V},\vec{W})=\vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W})$

$$=(U_1\vec{i}+U_2\vec{j}+U_3\vec{k}).\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ V_1 & V_2 & V_3\\ W_1 & W_2 & W_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}U_1 & U_2 & U_3\\ V_1 & V_2 & V_3\\ W_1 & W_2 & W_3\end{vmatrix}$$

propriétés du produit mixte

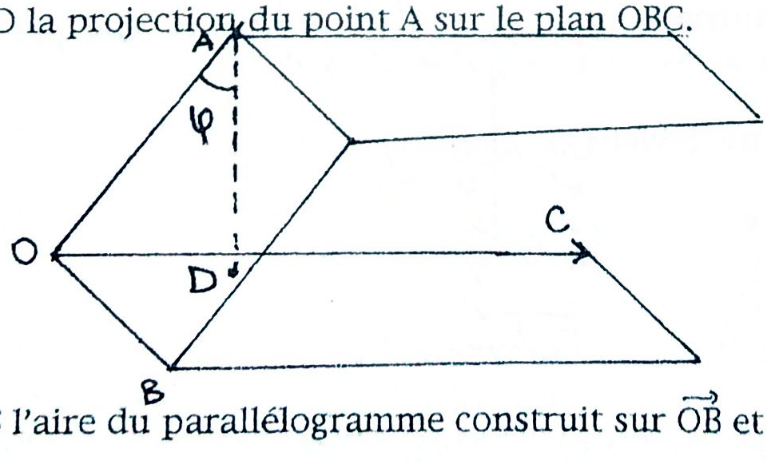
$(\vec{U},\vec{V},\vec{W})=-(\vec{V},\vec{U},\vec{W})=-(\vec{W},\vec{V},\vec{U})$

Signification géométrique

Il est facile de donner une signification géométique simple du produit mixte. A partir des 3 vecteurs, on positionne les 3 points A, B et C tel que

$$\overrightarrow{OA}=\vec{U},\overrightarrow{OB}=\vec{V},\quad\overrightarrow{OC}=\vec{W}.$$

soit D la projection du point A sur le plan OBC.



Soit S l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

$$S = |\vec{V} \wedge \vec{W}|$$

Si on appelle V, volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, et $\overrightarrow{OC}$.

$$V = S.AD = S.OA\cos\varphi = |\vec{V} \wedge \vec{W}||U|\cos\varphi$$

D étant la projection de A sur le plan OBC.

La direction de $\overrightarrow{AD}$ est perpendiculaire à ce plan et est parallèle à la direction produit vectoriel $\vec{V} \wedge \vec{W}$ et φ est l'angle que fait la direction $\overrightarrow{OA}$ avec ce produit vectoriel.

On peut ainsi interpréter la formule donnant le volume par le produit scalaire de $\vec{V} \wedge \vec{W}$ par $\vec{U}$
Ainsi, un produit mixte entre 3 vecteurs est égale au volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs. Le volume étant invariant si on permute les vecteurs.

f) Double produit vectoriel :

On définit le double produit vectoriel par:

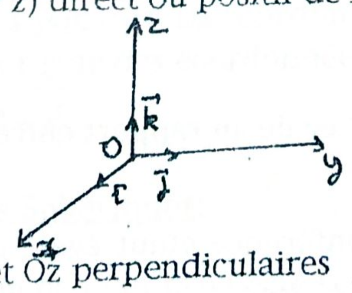
$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U}.\vec{W})\vec{V} - (\vec{U}.\vec{V})\vec{W}$$
$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) \neq (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$$

I-3 :Système de coordonnées

I-3-a coordonnées cartésiennes:

Pour repéter les phénomènes physiques; on est amené à utiliser différentes représentation de l'espace sous forme de systèmes de coordonnées. On utilise l'un ou l'autre suivant la sysmétrie du problème.

Le plus simple est le système des coordonnées cartésiennes: on définit un triédre (o x y z) direct ou positif de la manière suivantes.



- Les directions $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$ perpendiculaires
- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ direct.

I-3-b: coordonnées polaires:

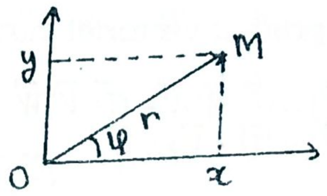
Suivant la symétrie du problème, on est amené à abandonner les coordonnées cartésiennes afin de se rattacher à un système plus naturel. Deux grandes familles de symétrie apparaissent fréquemment en physique.

- La symétrie sphérique: les propriétés de l'espace ne dépendent que de la distance (ex: charge électrique, gravitation autour d'une masse ponctuelle......).

- la symétrie cylindrique (de révolution ou axiale): rotation autour d'un axe, solénoide, rotation de la terre,.....

Dans un système de doordonnées à deux dimensions, les deux systèmes précédents se réduisent aux coordonnées polaires. La position du point M est définie par les deux quantités:

* $r = OM > 0$, rayon vecteur OM
* φ : angle polaire (OX est appelé axe polaire), $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



φ: mesuré dans le sens trigonométrie direct,

le système sexagésimal:

1 tour = 360° = 360°. 60' = 360.60.60"
Il ne faut pas confondre les symboles de minutes et secondes de degrés avec les même unités liées aux heures.
1 tour = 24h = 24.60 mn = 24.60.60s
1 heure = 60 mn =60.60s

Le radian:

La mesure de l'angle est égale au rapport entre la longueur de l'arc et le rayon du cercle.

la longueur de la circonférence étant égale à 2 πr (r: rayon du cercle), on a
1 tour = 2 π radians (rd)
1rd = 360 /2π = 57° 17' 45"

on passe d'un système à l'autre par les formules

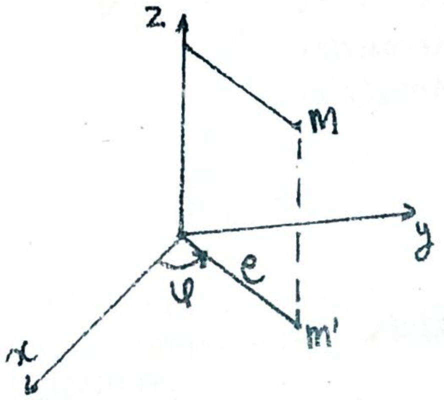
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \text{et inversement} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = Arctg(y/x)$$

Exemple: un point M a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = -9m \quad , y = -10m \\ r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{182} = = 13,45m \\ \varphi = Arctg(y/x) = \varphi = Arctg(1,11) = 48° \end{cases}$$

I-3-c: Coordonnées cylindriques:

On généralise les coodonnées polaires à 3 dimensions en ajoutant la coordonnée z.
Le point M est repéré par les 3 coordonnées



ρ: rayon vecteur du point M(> 0)
φ: angle polaire $(0 \le \varphi \le 2\pi)$
z: la côte

Pour ρ et φ , on utilise les mêmes formules de transformations que pour les coordonnées polaires. En coordonnées cylindriques, ρ n'est plus la distance à l'origine des coordonnées, c'est la quantité $\quad OM = \sqrt{\rho^2+z^2}$

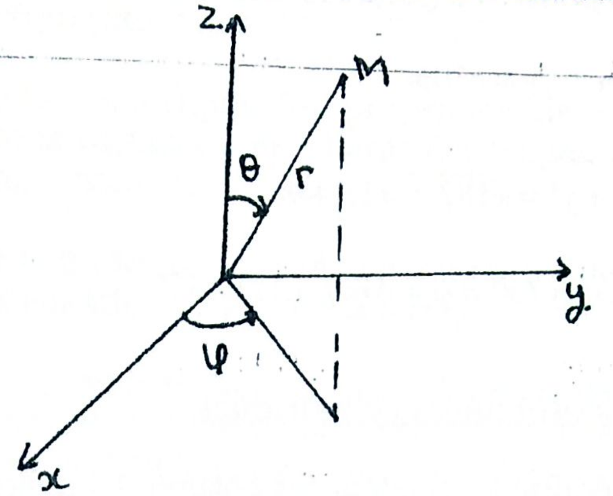
I-3-d: Coordonnées Sphériques:

Il n'y a plus d'axe ou de plan privilégié.Le point M est repéré par une distance et 2 angles r: distance $OM(r>0)$

φ : longitude ou azimut$(0\leq\varphi\leq 2\pi)$

θ: angle polaire ou colatitude$(0\leq\theta\leq\pi)$

On utilise également son complément appellé la latitudeλ.



On peut écrire facilement les formules de transformations

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases} \quad \text{et inversement} \quad \begin{array}{l} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = Ar\cos(z/r) \\ \varphi = Arctg(y/x) \end{array}$$

Exemple (voir T.D)

I-4 Analyse vectoriel

I-4-a: Fonction vectorielle et dérivée d'une fonction vectorielle:

Nous avons vu qu'une quantité physique peut s'exprimer comme fonction des coordonnées d'un point dans une certaine région de l'espace, la quantité physique est définie par un champ:

- scalaire f(x,y,z); pression, température, densité, potentiel,
- Vectoriel $\vec{V}(x,y,z)$: vitesse, accélération, force, champ électrique, champ magnétique....

Les composantes du vecteur peuvent être données de différentes manière et nous allons examiner 2 cas importants: la fonction vectorielle d'une variable réelle et la fonction vectorielle de plusieurs variables.

α) Fonction vectorielle d'une variable:

Dans le cas où les 3 composantes du vecteur V dépendent d'un seul paramètre (le temp t, le plus souvent). Dans un repère cartésien, la fonction vectorielle que nous noterons V(t) possède 3 composantes x(t), y(t) et z(t).

Si on dérive les trois composantes par rapport au temps par exemple, on définit la fonction dérivée de la fonction vectorielle.

$$\vec{V}(t) = \left| \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array} \right.$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

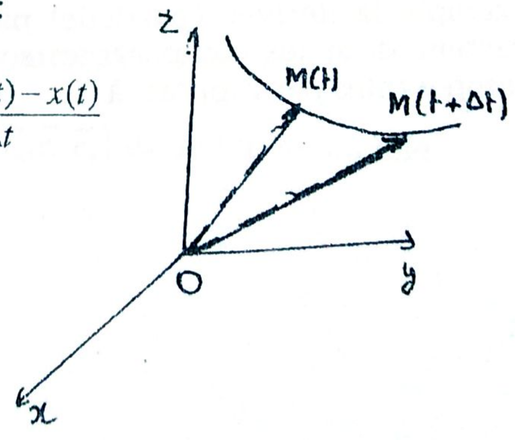
$$\vec{V'}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx(t)}{dt} = x'(t) \\[2ex] \dfrac{dy(t)}{dt} = y'(t) \\[2ex] \dfrac{dz(t)}{dt} = z'(t) \end{array} \right.$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$, quand le temps **t** varie, les 3 composantes (coordonnées) varient et le point M décrit une trajectoire.

A partir d'une position Mo réalisée à l'instant t, on considère la position M_1 atteinte à l'instant $(t+\Delta t)$.Comme le vecteur position a varié de OM $(t+\Delta t)$ - OM(t) , la première composante par exemple a varieé de $x(t+\Delta t)$-x(t) et on sait que :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



On généralise cette propriété pour une seule composante aux 3 composantes:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MoM_1}}{\Delta t}$$

Car la différence entre les deux positions est le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$
Quand $\Delta t \to 0$, la droite joignant les deux points se confond avec la tangente à la trajectoire. De même si on multiplie toutes les composantes de la dérivée par l'élément différentiel dt, chaque dérivée devient une différentiellle.

$$d\vec{V}(t) = \left| \begin{array}{l} dx(t) \\ dy(t) \\ dz(t) \end{array} \right.$$
$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

β) **Fonction vectorielle de plusieurs variables:**

$$\vec{V}(U,V,W) = \left| \begin{array}{l} Vu(U,V,W) \\ Vv(U,V,W) \\ Vw(U,V,W) \end{array} \right.$$
$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

la fonction vectorielle contient deux informations:

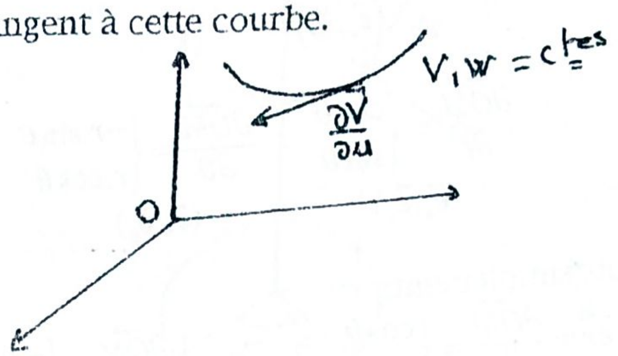
- elle dépend des coordonnées du point $M(U,V,W)$ et en ce point
- elle donne la direction du vecteur.

on peut dériver par rapport à l'une des trois variables et par exemple la dérivée (partielle) par rapport à U est un nouveau vecteur dont les composantes sont des dérivées partielle des 3 composantes par rapport à U .

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Vu}{\partial u} \\ \frac{\partial Vv}{\partial u} \\ \frac{\partial Vw}{\partial u} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Vu}{\partial v} \\ \frac{\partial Vv}{\partial v} \\ \frac{\partial Vw}{\partial v} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Vu}{\partial w} \\ \frac{\partial Vv}{\partial w} \\ \frac{\partial Vw}{\partial w} \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

quand on fixe les deux autres variables, quand U varie le point $M(U,V,W)$ décrit une courbe appelée <u>courbe de coordonnée</u>

Le vecteur $\frac{\partial \vec{V}}{\partial u}$ est tangent à cette courbe.



I-5 Repère local

Dans les coodonnées polaires, il existe une référence plus naturelle que le repère cartésien lié artificiellement aux axes de coordonnées OX et OY.
l'origine est déplacée de O en M et on définit un axe radial et un axe orthoradial qui lui est perpendiculaire. Ce nouveau repère est appelé repère local.

a) Définition:

Soit M un point et (U,V,W) ses coordonnées,
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une fonction des trois variables U, V et W et les vecteurs

$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}$ sont tangents aux courbes de coordonnées.

Par définition, le repère local $(M, \vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ est le repère mobile attaché au point M avec;

$$\vec{eu} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}\right\|} \qquad \vec{ev} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}\right\|} \qquad \vec{ew} = \frac{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}}{\left\|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial w}\right\|}$$

b) Repère polaire:

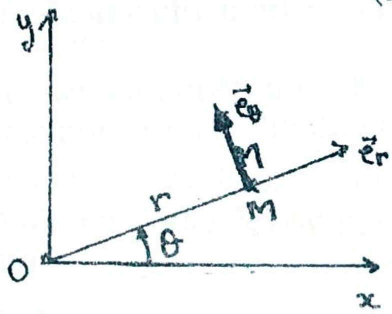
$$U = r \quad et \quad v = \theta$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} r.\cos\theta \\ r.\sin\theta \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{cases} -r.\sin\theta \\ r.\cos\theta \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$

On en déduit simplement:

$$\vec{er} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)} \qquad \vec{e}\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{cases} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{cases}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y)}$$



c) repère cylindrique:

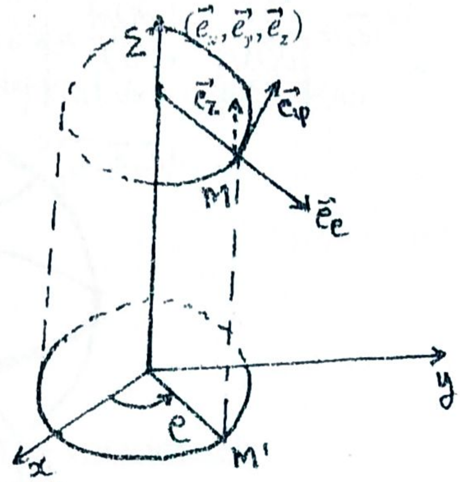
$$u = \rho, \quad v = \varphi \quad et \quad w = z$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MM'} = \begin{vmatrix} \rho.\cos\varphi \\ \rho.\sin\varphi \\ Z \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

On en déduit simplement

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} \qquad \vec{e}_z = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$



d) Repère sphérique:

$$u = r, \qquad v = \theta \quad et \quad w = \varphi$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} r.\cos\varphi\sin\theta \\ r.\sin\varphi\sin\theta \\ r.\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\theta \\ r.\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} r.\cos\varphi\cos\theta \\ r.\sin\varphi\cos\theta \\ -r.\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right| = 1 \qquad \left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta \qquad \left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right| = r$$

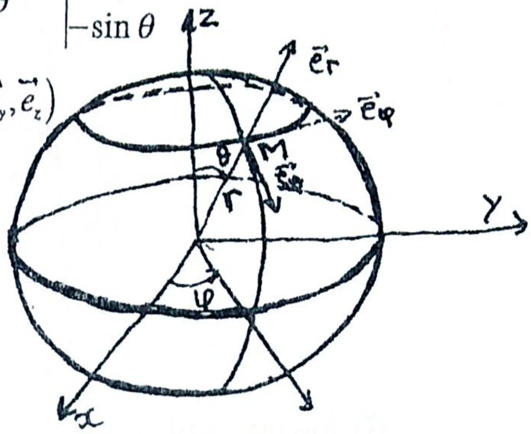
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}}{\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right\|} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}_{(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

$$\vec{e}_r = \frac{\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}}{\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right\|} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \left|\begin{array}{l} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{array}\right.$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}}{\left\|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right\|} = \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \left|\begin{array}{l} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{array}\right.$$

$$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$



I-6 : Opérations sur une fonction vectorielle:

a) Dérivée:

$\vec{V}(u)$ une fonction vectorielle

- la dérivée de cette fonction est $\dfrac{d\vec{V}(u)}{du}$

- soit $\varnothing$ (u) une fonction scalaire

$$\frac{d\varnothing\vec{V}}{du} = \frac{d\varnothing(u)}{du}.\vec{V}(u) + \varnothing(u).\frac{d\vec{V}(u)}{du}$$

$$d(\vec{V}(u).\vec{V'}(u)) = \vec{V}(u).\frac{d\vec{V'}(u)}{du} + \frac{d\vec{V}(u)}{du}.\vec{V'}(u)$$

$$\frac{d(\vec{V}(u) \wedge \vec{V'}(u))}{du} = \frac{d\vec{V}(u)}{du} \wedge \vec{V'}(u) + \vec{V}(u) \wedge \frac{d\vec{V'}(u)}{du}$$

b) Intégrale d'un vecteur:

$$\vec{V}(u) = V_1(u)\vec{i} + V_2(u)\vec{j} + V_3(u)\vec{k}$$

$$\int \vec{V}(u).du = \vec{i}.\int V_1(u).du + \vec{j}.\int V_2(u).du + \vec{k}.\int V_3(u).du$$

l'intégrale d'une fonction vectorielle a pour composante intégrale des composantes de V(u).

autrement dit une fonction vectorielle $\vec{W}(u)$ tq $\frac{d\vec{w}(u)}{du} = \vec{V}(u)$

$$\int V(u).du = \int dW(u) = W(u) + C \ , \qquad \text{C est une constante}$$

$$\int_{u_1}^{u_2} V(u).du = W(u_2) - W(u_1)$$

c) Gradient- divergence- rotationnel:

Considérons un opérateur vectoriel noté $\vec{\nabla}$ nabla,

$$\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$
$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Appliquons cet opérateur vectoriel sur une fonction scalaire soit $\varnothing(x,y,z)$

$$\vec{\text{Grad}}\ \varnothing(x,y,z) = \vec{\nabla}.\varnothing = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \varnothing}{\partial x} \\ \frac{\partial \varnothing}{\partial y} \\ \frac{\partial \varnothing}{\partial z} \end{array} \right.$$
$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Appliquons nabla sur une fonction vectorielle $\vec{V}(x, y, z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = divV$$

Appliquons à présent l'opérateur nabla vectoriellement sur la fonction vectorielle $\vec{V}$

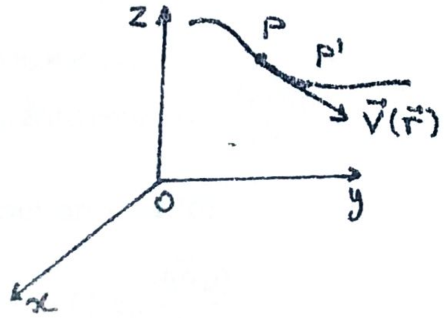
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

qu'on appelle rotationnel de $\vec{V}$. noté rot $\vec{V}$

$$\vec{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$
$$div(\vec{rot}\vec{A}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$
$$\vec{rot}(\vec{grad}\varnothing) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}.\varnothing) = \vec{0}$$

Intégrale curvilgne:

Dans un espace repéré par O(xyz) considérons une courbe.



Le point $P \in (C)$est repéré par son vecteur position $OP = r(x, y, z)$
On appelle intégrale curviligne de V(r) le long de la courbe (C) entre deux points P_1 et P_2 l'expression.

$$\int_{P_1}^{P_2} V(r).d1 \quad ;d1(dx, dy, dz)$$

$$\int_{P_1}^{P_2} V_1(x,y,z).dx + \int_{P_1}^{P_2} V_2(x,y,z).dy + \int_{P_1}^{P_2} V_3(x,y,z).dz$$

pour calculer cette intégrale, on peut donner une représentation paramétrique de la courbe (c)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \varnothing(t).dt$$

d'une manière générale, une intégration curviligne dépend du chemin suivi entre t_1 et t_2

Il existe cependant un cas particulier important où l'intégrale curviligne ne dépend pas du chemin suivi, C'est le cas où la fonction vectorielle V s'écrit sous forme d'un gradient $\varnothing$.

$$\vec{V} = \overrightarrow{grad}\varnothing = \vec{\nabla}.\varnothing$$

On peut aussi dire que $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$

L'intégrale curviligne s'écrit:

$$\int_{P1}^{P2} \vec{V}(\vec{r}).d\vec{r} = \int_{P2}^{P1} \frac{\partial \varnothing}{\partial x}.dx + \frac{\partial \varnothing}{\partial y}.dy + \frac{\partial \varnothing}{\partial z}.dz$$

$$= \int_{P1}^{P2} d\varnothing = \varnothing(P_2) - \varnothing(P_1)$$

$$d\varnothing = \frac{\partial \varnothing}{\partial x}.dx + \frac{\partial \varnothing}{\partial y}.dy + \frac{\partial \varnothing}{\partial z}.dz$$

s'appelle différentielle exacte de $\varnothing$.